Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Homomorphiesatz**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2)
Gegeben sei die Projektion auf die x-Achse im $\mathbb{R}^2$ durch $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y)^T \mapsto (x, 0)^T$. Versuchen Sie den Homomorphiesatz zu veranschaulichen, indem Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\operatorname{Bild} A$ berechnen und exemplarisch einige Elemente aus $\mathbb{R}^2/\operatorname{Kern} A$ und deren Bilder unter $\overline{A} : \mathbb{R}^2/\operatorname{Kern} A \to \operatorname{Bild} A$ mit $v + \operatorname{Kern} A \mapsto A(v)$ in den $\mathbb{R}^2$ einzeichnen.

Aufgabe 2 (4)
Es seien U und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Bezüglich der folgenden „punktweisen Operationen“ ist auch das kartesische Produkt $U \times W$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum:

- $(u_1, w_1) + (u_2, w_2) := (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$, für alle $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$ und
- $k \cdot (u, w) := (ku, kw)$, für alle $k \in \mathbb{K}, u \in U, w \in W$.

a) Benutzen Sie die Abbildung $A : U \times W \to W$ mit $(u, w) \mapsto w$ und den Homomorphiesatz, um zu zeigen, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U \times W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W$ gilt.

b) Nun seien U und W Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Betrachten Sie die Abbildung $A : U \times W \to V$, gegeben durch $A(u, w) = u - w$, für alle $u \in U, w \in W$. Zeigen Sie, dass A ein Homomorphismus ist und bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

c) Folgern Sie aus den vorherigen Teilaufgaben erneut die Dimensionsformel für Unterräume.

Aufgabe 3 (4)
Es seien U und W Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

a) Betrachten Sie die Abbildung $A : W \to V/U$ mit $w \mapsto w + U$ und folgern mithilfe des Homomorphiesatzes, dass gilt: $W/(W \cap U) \cong (W + U)/U$.

b) Nun sei W ein Unterraum von U und U ein Unterraum von V. Benutzen Sie erneut den Homomorphiesatz und die Abbildung $A : V/W \to V/U$ mit $v + W \mapsto v + U$ und folgern damit, dass gilt: $(V/W)/(U/W) \cong V/U$.